ARTIGO

CIENTEC
Revista de Ciência, Tecnologia e Humanidades do IFPE

A DINÂMICA LAGRANGEANA DO PÊNDULO DUPLO

The Lagrangian Dynamics of the Double Pendulum

Recebido em 08/04/2018. Aprovado em 03/10/2018.

Luciano Nascimento *

Departamento de Matemática-DM/FCT-FACR **|** * e-mail: luciano.ufcg@gmail.com

Anastasiia Melnyk

Departamento de Educação-DE/ICEL

RESUMO

Este trabalho visa fornecer um tratamento matemático do pêndulo duplo usando o formalismo lagrangeano. O pêndulo duplo consiste em um pêndulo acoplado a outro pêndulo através de sua massa. Pêndulo duplo apresenta uma dinâmica mais complexa do que pêndulo simples, e demonstram uma sensibilidade às condições iniciais. Modelos matemáticos de pêndulo são utilizados para estudos de diferentes sistemas físicos. Neste trabalho é proposta do uso dá formulação lagrangeana para descrever o pêndulo duplo com seu comportamento dinâmico não-linear.

Palavras-chaves: *Pêndulo duplo; Conservação da energia; Formalismo langrageano*.

ABSTRACT

This work aims to provide a mathematical treatment of the double pendulum using lagrangian formalism. The double pendulum consists of a pendulum coupled to another pendulum through its mass.Double pendulum presents a more complex dynamics than simple pendulum, and demonstrates sensitivity to the initial conditions. Mathematical pendulum models are used for studies of different physical systems. In this work is proposed the use of lagrangean formulation to describe the double pendulum with its non-linear dynamic behavior.

Keywords: Double pendulum; Energy conservation; Formalism lagrangian.

1. Introdução

A formulação lagrangeana variacional está diretamente relacionada à modelagem energética dos sistemas. A vantagem dessa abordagem sobre as abordagens feitas nas equações de Newton são as bases da Mecânica Clássica, sendo um sistema complexo que, pode ser decomposto em vários sub-sistemas cujas modelagens podem ser mais simples do que a modelagem do todo. Como a energia total de um sistema é a soma das energias das partes, é possível obter-se um resultado global a partir dos resultados parciais (Faria Neto et al.,2011).

Os métodos clássicos, baseados na força, não existe tal flexibilidade. Quando muito, é possível aplicar o método da superposição de efeitos. Contudo, esse método não se aplica aos sistemas não-lineares .

Já se sabe que a formulação Lagrangeana pode ser aplicada, com certa facilidade, à modelagem de sistemas mecânicos. Constituindo-se, assim, numa maneira menos trabalhosa de se obter as equações diferenciais que explicam o sistema.

Faz necessário, usar as coordenadas generalizadas para definir a posição no espaço de um conjunto de partículas. Em geral, podemos escolher qualquer conjunto de coordenadas para descrever o movimento de um sistema físico. Coordenadas generalizadas são qualquer coleção de coordenadas independentes q_i que são suficientes para especificar a configuração de um sistema de partículas. Um sistema físico é descrito por *N* coordenadas generalizadas e seja caracterizado por certa função escalar *L*.

O Princípio de Hamilton, também chamado de princípio de mínima ação, estabelece que a evolução do sistema de certa configuração para outra é tal que a ação é um mínimo. Se faz, necessário definir, um procedimento seguido para escrever equações de Lagrange associadas a um dado sistema mecânico holônomo (Jardim et al.,2016).

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \dot{q}, t\right) dt \qquad (1)$$

A função $L = L\left(q, \dot{q}, t\right)$ é chamada de lagrangeana do sistema que, denota-se por um conjunto de coordenadas $\left(q_1, ..., q_N\right)$ similarmente com velocidades generalizadas do tipo,

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \qquad (2)$$

O trajeto real da partícula, entre os instantes t_1 e t_2 minimiza a ação, se fixarmos os extremos da trajetória, satisfazendo a condição de mínimo e não havendo relações de vínculos entre as coordenadas generalizadas, obtemos a equação de Euler-Lagrange (Leech, 2003):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, i=1,2,...,s \tag{3}$$

A equação (3) representa o formalismo lagrangeano, que tipifica a segunda lei de Newton. A lagrangeana de um sistema mecânico é definida como *L=T-V*, onde T é a energia cinética e V é a energia potencial do sistema.

2. Teoria

2.1 formalismo matemático

O pêndulo duplo consiste em um pêndulo acoplado a outro pêndulo através de sua massa (Agrawal, 2000). Considere o pêndulo duplo mostrado na Figura 1 com massas m_1 e m_2 unidas por varas sem massa rígida de comprimentos l_1 e l_2. Para simplificar a análise do sistema, o movimento será restringido a um plano. Convenientemente usamos ângulos entre o corpo e a vertical como coordenadas generalizadas para definição da configuração do sistema. Estes ângulos são chamados θ_1 e θ_2, e deixe a gravidade ser dada por g.

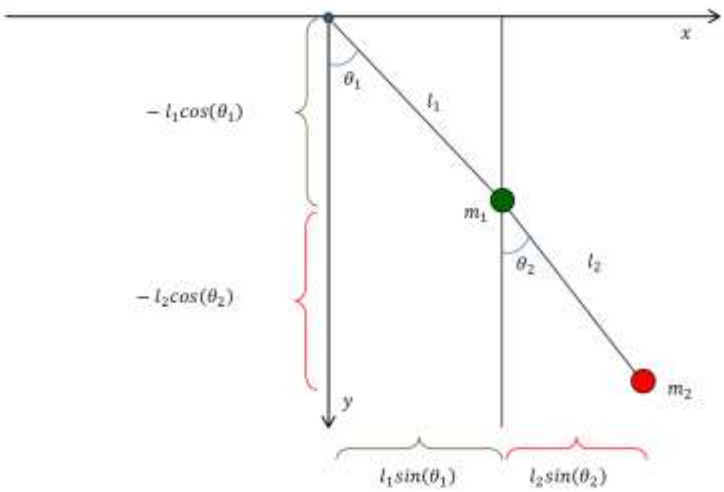

Figura 1. O pêndulo duplo no plano.; Fonte: Autor

Vamos fazer a dedução matemática das equações do movimento deste sistema através do formalismo lagrangiano. Portanto, calculando as energias envolvidas para as massas,

Massa 1=m_1

$$\dot{x}_1 = l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \tag{4}$$

e

$$\dot{y}_1 = l_1\dot{\theta}_1 sen\theta_1 \tag{5}$$

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 \tag{6}$$

Massa 2=m_2

$$\dot{x}_2 = l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \tag{7}$$

e

$$\dot{y}_2 = l_1\dot{\theta}_1 sen\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 sen\theta_2 \tag{8}$$

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + l_2^2\dot{\theta}_2^2 \tag{9}$$

Então, a energia cinética T do sistema fica:

$$T = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) \tag{10}$$

$$T = \frac{m_1}{2}\left(l_1^2\dot{\theta}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + l_2^2\dot{\theta}_2^2\right) \tag{11}$$

$$T = \frac{(m_1+m_2)}{2}\left(l_1^2\dot{\theta}_1^2\right) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + \frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\theta}_2^2 \tag{12}$$

A energia potencial U depende somente de y, então:

Massa 1=m_1

$$U = -m_1gl_1\cos\theta_1 \tag{13}$$

Massa 2=m_2

$$U = -m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2) \tag{14}$$

Então a energia *U* total será:

$$U = m_1gl_1\cos\theta_1 - m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2) \tag{15}$$

$$U = -(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2gl_2\cos\theta_2 \tag{16}$$

A Lagrangeana será (Pesce, 2003):

$$L = T - V \tag{17}$$

$$L = \frac{(m_1 + m_2)}{2} l_1^{\,2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(l_2^{\,2}\dot{\theta}_2^2\right) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \\ +(m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2 \tag{18}$$

Para obter a equação para *θ1*, devemos calcular os termos:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = (m_1 + m_2) l_1^{\,2} \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \tag{19}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = (m_1 + m_2) l_1^{\,2} \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \\ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 sen(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \tag{20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -l_1 g(m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 sen(\theta_1 - \theta_2) \tag{21}$$

De forma análoga para *θ2*:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2 l_2^{\,2} \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_\partial l_2^{\,2} \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \\ -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 sen(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \tag{23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sen(\theta_1 - \theta_2) - l_2 m_2 g sen\theta_2 \tag{24}$$

Então, ficamos com:

$$m_2 l_2^{\,2} \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 sen(\theta_1 - \theta_2) + \\ + l_2 m_2 g sen\theta_2 = 0 \tag{25}$$

Que simplificando por *l2*, fica:

$$m_2 l_2^{\,2} \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 sen(\theta_1 - \theta_2) + \\ + m_2 g sen\theta_2 = 0 \tag{27}$$

$$m_2 l_2^{\,2} \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 sen(\theta_1 - \theta_2) + \\ + m_2 g sen\theta_2 = 0 \tag{26}$$

Ambas as equações devem ser resolvidas em termos de $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$ para serem utilizadas no método numérico. Então conforme Lemos (2004) temos que:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-g(2m_1+m_2)sen\theta_1 - m_2 g(\theta_1-2\theta_2) - 2sen(\theta_1-\theta_2)m_2(\dot{\theta}_2^2 l_2 + \dot{\theta}_1^2 l_1 \cos(\theta_1-\theta_2))}{l_1(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2))} \quad (28)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2sen(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1^2 l_1(m_1+m_2) + g(m_1+m_2)\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1-\theta_2))}{l_2(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2)} \quad (29)$$

3. Resultados e discussão

3.1 solução numérica

Este pêndulo apresenta um movimento caótico com os mesmos parâmetros iniciais em lançamentos diferentes. Vamos tomar os seguintes parâmetros iniciais e comparar os traços, gráficos e diagramas de fase de cada um:

- m_1 = 13 Kg
- m_2 = 13 Kg
- ω_1 = 0 rad=s
- ω_2 = 0 rad=s
- l_1 = 1 m
- l_2 = 1 m
- θ_1 = 90º
- θ_2 = 125º
- g = 9.81m/s^2

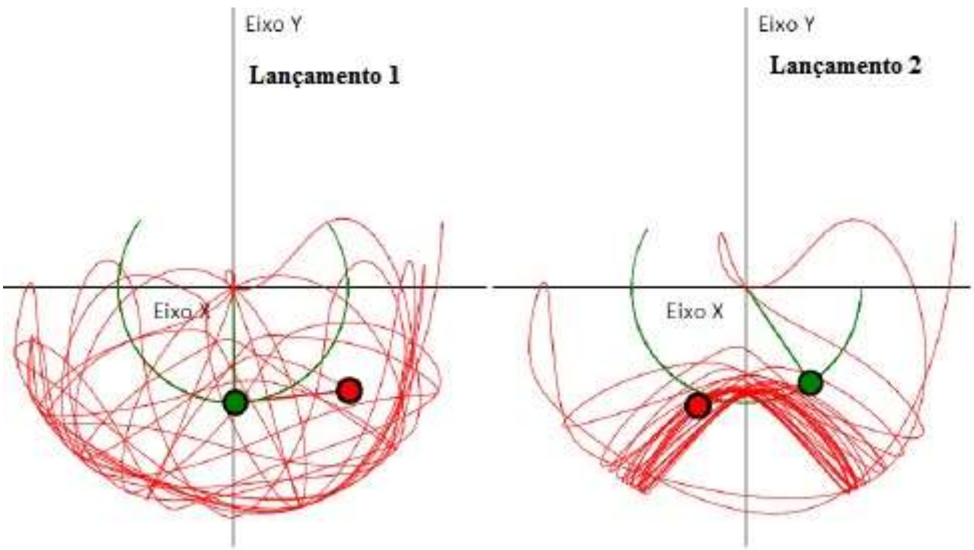

Figura 2. Traços dos pêndulos duplos após 30s de movimento.; Fonte: Autor

Isso mostra uma solução particular do problema do pêndulo duplo, que permite rapidamente através de métodos numéricos que o torna um movimento complexo. Convém relembrar que estamos perante um sistema caótico, pelo que os resultados dependerão muito dos valores dados ás diversas variáveis.

Conclusões

As principais conclusões deste trabalho são:

- O pêndulo duplo é um sistema de grande interesse em nível caótico, exibindo grande sensibilidade às condições iniciais: o efeito "borboleta", conforme a Figura 2.
- O comportamento do sistema, apresenta multi-graus de liberdade linear pequenos θ_1 e θ_2 ;
- O formalismo lagrangeano mostra-se mais sistemático como ferramenta de obtenção das equações de movimento através de equações diferenciais ordinárias;

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq pelo o suporte financeiro desta pesquisa.

Referências

FARIA NETO, A.; OLIVEIRA, A. M.; LAMBERT-TORRES, G.; LOTUFO, F. A. Formulação Lagrangeana para Circuitos Eletromecânicos**. Revista Seleção Documental/GLPA** 24(6). p. 15-21, 2011.

JARDIM, W. T.; OTOYA, V. J. V. SOUZA, J. R. Introdução à cinemática via cálculo de Lagrange: Discutindo os conceitos de velocidades média e instantânea**. Revista Brasileira de Ensino de Física** 38(1). p.1312 1/7,2016.

LEECH, J. W. **Mecânica Analítica**. Ed. Ao livro técnico S. A./Reformulada e Editora da Universidade de São Paulo. Rio de Janeiro, 157p.,2003.

AGRAWAL, O. P. A New Lagrangian and a New Lagrange Equation of Motion for Fractionally Damped Systems. **Journal of Applied Mechanics** 68(2). p.339-341,2000.

PESCE, C.P. The Application of Lagrange Equations to Mechanical Systems with Mass Explicitly Dependent on Position. **Journal of Applied Mechanics** 70.p. 751-756,2003.

LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. São Paulo: Editora Livraria da Física. p.25-40, 2004.