

Triângulo Esférico: uma abordagem da soma dos ângulos internos

Spherical Triangle: an approach to the sum of the internal angle

Françoise Souza Azevedo*¹

[*afsouza5732@gmail.com](mailto:afsouza5732@gmail.com)

¹ IFPE - Instituto Federal de Pernambuco (Campus Barreiros)

RESUMO

Este texto faz uso da construção de um transferidor esférico para evidenciar que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, numa superfície esférica com curvatura positiva, difere da referida soma comumente usada na Geometria Euclidiana em virtude de que os lados do triângulo são arcos desta superfície.

Palavras-chave: curvatura; soma dos ângulos; superfície esférica; transferidor.

ABSTRACT

This text makes use of the construction of a spherical protractor to show that the sum of the internal angles of any triangle, on a spherical surface with positive curvature, differs from the aforementioned sum commonly used in Euclidean Geometry because the sides of the triangle are arcs of this surface.

Keywords: curvature, sum of angles, spherical surface, protractor.

1. Introdução: uma reflexão histórica sobre a Geometria

A Geometria, do grego (γεωμετρία), onde geo - terra e metrein – medir (medidas da terra), surgiu da necessidade de medir áreas agrárias e arquitetônicas precedendo a época de egípcios e mesopotâmicos, inferindo cálculos de áreas, volumes e comprimentos, essenciais para Agricultura, Arquitetura, Engenharia, entre tantas outras áreas.

Ao longo da evolução e concretização da Matemática Pura como ciência, diversos filósofos e matemáticos como Platão (428-347 a.C.) responsável por criar uma Academia de Atenas que muito contribuiu para a Geometria especialmente com Euclides de

Alexandria (300 a. C) criando a belíssima obra *Os Elementos* com o seu ordenamento coeso e sincrônico de conceitos, axiomas e postulados na Geometria distribuídos ao longo de treze livros. Tal obra é considerada, na Geometria, mais lida e apreciada de todos os tempos com inúmeras edições e traduções que fizeram Euclides ser considerado o “Pai da Geometria”.

Nesta obra a 32ª proposição estabelece que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° , justificada ao traçar uma reta que contenha um dos vértices de um triângulo qualquer ABC e que seja paralela ao lado que contém os demais vértices. Portanto, "se com Homero a língua grega alcançou a perfeição, atinge com Euclides a precisão." (Bicudo, 2009, p.13). Dentro desta obra destacam-se os cinco Postulados de Euclides, no livro I após as primeiras definições da Geometria Plana.

Seja postulado o seguinte:

1. Traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.
2. Estender um segmento de reta continuamente em uma linha reta.
3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
4. Que todos os ângulos retos são iguais.
5. Que, se uma linha reta caindo sobre duas linhas retas faz ângulos internos do mesmo lado cuja soma seja menor do que dois retos, as duas linhas retas, se estendidas indefinidamente, encontram-se no mesmo lado em que a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos (Heim, 2013, p. 07).

Os quatro primeiros postulados tornaram-se óbvios, com exceção do V postulado, hoje denominado *Postulado das Paralelas*. Entendê-lo requer mais percepção e tempo, levando muitos Matemáticos a tentar demonstrá-lo, segundo Heim (2013), empregando constantes investigações por mais de dois mil anos. Partindo desse pressuposto, muitos se aventuraram na demonstração do V postulado:

- Giovanni Girolamo Saccheri (XVI-XVIII) propôs pela Teoria por Absurdo validar o V postulado, nessa tentativa ao invés de encontrar contradições produziu alguns Axiomas pelo estudo do quadrilátero ABCD tentando provar ser ele um retângulo pela condição de seus ângulos internos.
- Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) tentou demonstrar o V Postulado admitindo a lógica de existir outras medidas fora da visão da superfície plana, contradizendo o paralelismo de Euclides. Mas não expôs, guardando para si suas ideias.
- János Bolyai (1808-1860) e Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) ousaram também, publicaram seus trabalhos constituindo-se de uma

nova Geometria denominada inicialmente de Geometria Imaginária posteriormente de Pangeometria, invalidando o V postulado sem contradição, entretanto com insucesso, pois foram ignorados pelos matemáticos da época.

Em meados do século XIX surge uma nova luz ao problema. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) na tentativa de provar o V Postulado usando coordenadas numa superfície esférica propôs a existência de uma Geometria diferente da Euclidiana.

Entretanto, as incertezas causadas pelo Quinto Postulado e os estudos dos precursores sobre a possibilidade de uma geometria distinta da de Euclides abriram precedentes para o surgimento de duas “Novas Geometrias”, negando o Quinto Postulado.

- Por um ponto fora de uma reta, existem pelo menos duas retas paralelas à reta dada.

- Por um ponto fora de uma reta, não existe reta paralela à reta dada.

A primeira foi fundamentada na superfície hiperbólica, denominada então de Geometria Hiperbólica, e a segunda na superfície esférica, chamada de Geometria Esférica (Carvalho, 2017, p. 15).

Chamada inicialmente de Geometria Não-Euclidiana, onde o que difere baseia-se nas relações de distâncias entre pontos considerados em diferentes visões desses mesmos pontos. Posteriormente essa nova descoberta alicerçaria as novas Geometrias que hoje conhecemos como Geometria Hiperbólica, Elíptica ou Esférica, esta última, com aplicações importantes na Cartografia, Astronomia e Navegação.

Há também, um sentido mais restrito atribuído à expressão Geometria Riemanniana nos dias de hoje, que consiste em interpretar o plano como uma superfície de uma esfera e uma reta como um círculo máximo sobre a esfera. Neste caso, a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é maior que dois retos (Marqueze, 2006, p. 56).

Com efeito, na Geometria Esférica, os triângulos esféricos, ou seja, triângulos construídos numa superfície esférica, não satisfazem a 32ª proposição da Obra de Euclides e tal observância é objeto de constatação deste texto.

2. O transferidor esférico e o triângulo esférico

Visando facilitar a observância acerca da soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Esférica, construímos um *transferidor esférico* como dispositivo de medição angular de modo que sua aplicação nos permita inferir considerações sobre conceitos de circunferências máximas, geodésicas numa superfície esférica. Como ferramenta auxiliar, usamos o *software Geogebra*, a fim de percebermos que a soma dos ângulos de um triângulo esférico excede os 180° uma vez que os seus lados do triângulo são arcos da superfície esférica, proporcionando um excesso esférico devido sua

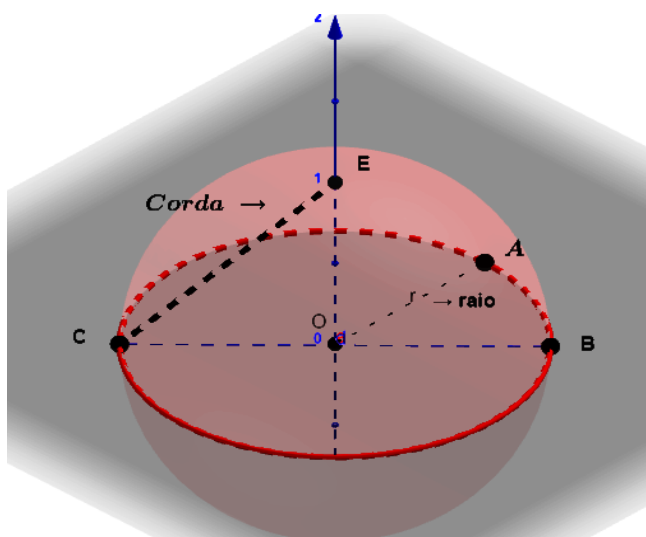
localização ser numa superfície esférica com curvatura positiva impondo uma dupla desigualdade. Mais precisamente, se α, β, γ , não nulos, são os ângulos internos de um triângulo esférico ABC, então $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$.

A partir do software Geogebra conseguimos dar mais visibilidade às construções e entendimento de conceitos como o que segue.

2.1. Definição

“Seja um ponto O e um segmento de medida r . Chama-se esfera de centro O e raio r ao lugar geométrico dos pontos P do espaço, cujas distâncias a O são menores ou iguais a r .” (Silva, 2017, p. 21).

Figura 1 - A esfera e seus elementos.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Nela podemos observar alguns pontos importantes para nossa compreensão:

- O Ponto O é o centro da esfera;
- O eixo é uma reta que passa pelo centro da esfera;
- O segmento \underline{CB} é o diâmetro da esfera;
- O segmento \underline{OA} é o raio da esfera.
- O segmento de reta \underline{CE} , definidos por dois pontos distintos na esfera determina uma corda.
- O segmento \widehat{AB} determina um arco na circunferência.

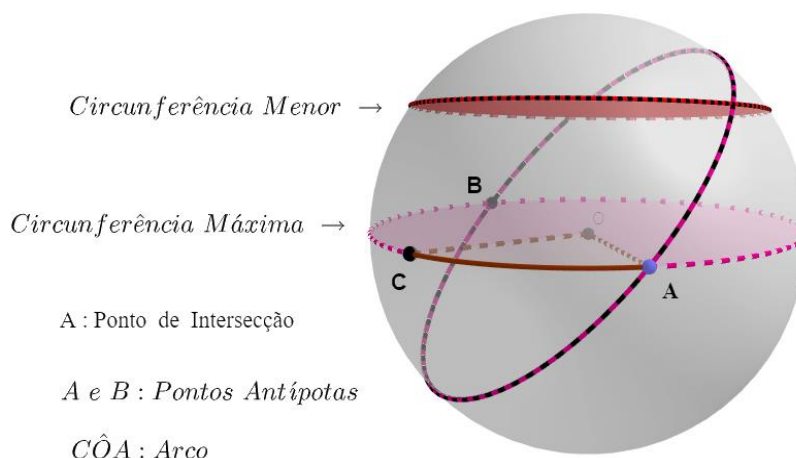
Na Geometria Euclidiana o menor percurso entre dois pontos A e B é o segmento de reta \overline{AB} determinado por eles enquanto na Esférica é o menor dos possíveis arcos \widehat{AB} . Se usarmos como modelo o globo terrestre com seus Meridianos e paralelos onde a Linha do Equador seria um círculo máximo e os paralelos semicírculos máximos no globo terrestre.

Desse modo, na superfície de uma esfera a reta pode ser chamada além de geodésica, como um círculo máximo ou grande círculo e são determinadas por dois pontos como na Geometria Euclidiana. A partir daí, é perceptível que uma reta na superfície esférica possui propriedades próprias. Ela deixa de ser infinita e torna-se ilimitada (Marqueze, 2006, p. 58).

Segundo Silva (2017), Heim (2013), Thomaz (2008) algumas ideias são importantes à compreensão da Geometria Esférica, destacando-se algumas considerando sua superfície:

- a) Quando um plano secciona uma esfera passando por seu centro, a sua intersecção com essa esfera definimos como circunferência máxima ou geodésica, as demais circunferências paralelas a esta são denominadas circunferências menores. Na geometria esférica as “linhas retas” são representadas por circunferências máximas e menores.
- b) Quaisquer duas circunferências máximas (retas) em um plano têm pelo menos um ponto de encontro.
- c) Considerando-se qualquer ponto sobre a esfera passam infinitas circunferências máximas (retas) por ele.
- d) Se A e B pertencem a superfície esférica e estão diametralmente opostos numa circunferência máxima, então esses pontos são denominados pontos antípodas.
- e) Considerando-se os pontos A e B Sobre uma circunferência máxima, a distância entre esses pontos é a menor porção da circunferência que a

Figura 2. Elementos numa superfície esférica.



Fonte: Elaborado pelos autores.

f) **Ângulo esférico** é um caso particular de ângulo diedro resultado da intersecção de dois arcos de circunferência máxima localizados numa superfície esférica.

2.2. Definição

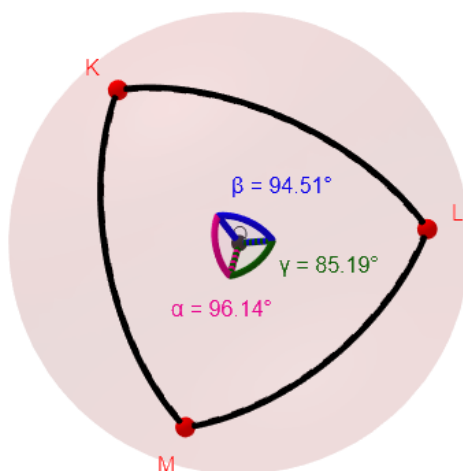
O polígono esférico é toda pequena parte da superfície esférica que se limita por arcos de circunferência máxima. Quando esta porção é limitada por três arcos que se cruzam dois a dois em seus vértices, forma-se então, o triângulo esférico.

Considere três arcos: $f = (O, M, L)$, $g = (O, M, K)$ e $h = (O, K, M)$ sobre uma superfície esférica com raio unitário, interceptando-se dois a dois e gerando três vértices K , L e M onde cada ponto de encontro gera três regiões angulares $\alpha = \angle KOM = 96,14^\circ$, $\beta = \angle LOK = 94,51^\circ$ e $\gamma = \angle LOM = 85,19^\circ$ de modo que a porção da superfície gerada a partir dessa região é um triângulo esférico KLM .

Neste triângulo por seus lados serem arcos, observa-se as seguintes propriedades:

- Os arcos devem ser medidos em graus($^\circ$) ou em radianos(π);
- A soma das medidas dos ângulos internos pode variar numa desigualdade de $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$, tendo valor fixado dependendo do triângulo a ser analisado.
- Pode-se apresentar 1, 2 ou 3 ângulos retos.

Figura 3 - Triângulo Esférico.



Triângulo Esférico

Fonte: Elaborado pelos autores.

3. Construção de um triângulo esférico no Geogebra

Uma possibilidade de construção de um triângulo esférico é a utilização de um teodolito de precisão. Contudo, usamos o software Geogebra em virtude da facilidade de dispor do programa e pela vasta aplicações em diversas áreas da Matemática, permitindo construir pontos, segmentos de retas, arcos, medir ângulos, figuras, gráficos, entre outros. Segundo orientações de Silva (2017), pude criar este triângulo esférico, ao qual me refiro na figura 3, citada anteriormente mediante os seguintes passos após abrir o programa Geogebra do modo clássico, usando o ícone janela 3D.

Tabela 1 - Protocolo de construção do triângulo esférico

Nome	Definição	Valor
Ponto O	Interseção (Eixo X, Eixo Z)	$O = (0, 0, 0)$
Ponto A	Ponto (Eixo)	$A = (1, 0, 0)$
Esfera a	Esfera (O, A)	$a: x^2 + y^2 + z^2 = 1$
Ponto B	Ponto Em(a)	$B = (0.59, -0.05, 0.8)$
Ponto D	Ponto Em(a)	$D = (0.61, -0.62, 0.5)$

Plano p	Plano (O, B, D)	$p: 0.47x + 0.19y - 0.34z = 0$
Ponto C	Ponto Em(a)	$C = (0.51, 0.19, 0.84)$
Círculo c	Círculo (C, B, D)	$c: X = (-0.06, -0.03, 0.06) + (0.33 \cos(t) - 0.62 \sin(t), -0.93 \cos(t) - 0.1 \sin(t), -0.14 \cos(t) - 0.77 \sin(t))$
Ponto E	Ponto Em(a)	$E = (-0.93, -0.08, 0.37)$
Ponto F	Ponto Em(a)	$F = (-0.93, 0.31, 0.2)$
Plano q	Plano (O, F, E)	$q: 0.13x + 0.16y + 0.36z = 0$
Ponto G	Ponto Em(a)	$G = (-0.64, -0.58, 0.5)$
Círculo d	Círculo (F, E, G)	$d: X = (0.01, 0.02, 0.05) + (0.96 \sin(t), -0.91 \cos(t) - 0.1 \sin(t), 0.4 \cos(t) - 0.24 \sin(t))$
Círculo e	Círculo (G, F, E)	$e: X = (0.01, 0.02, 0.05) + (-0.3 \cos(t) - 0.92 \sin(t), 0.9 \cos(t) - 0.18 \sin(t), -0.31 \cos(t) + 0.35 \sin(t))$
Círculo f	Círculo (C, B, D)	$f: X = (-0.06, -0.03, 0.06) + (0.33 \cos(t) - 0.62 \sin(t), -0.93 \cos(t) - 0.1 \sin(t), -0.14 \cos(t) - 0.77 \sin(t))$
Ponto H	Ponto Em(a)	$H = (-0.37, -0.22, 0.9)$
Ponto I	Ponto Em(a)	$I = (0.37, 0.23, 0.9)$
Plano r	Plano (O, H, I)	$r: -0.4x + 0.67y = 0$
Ponto J	Ponto Em(a)	$J = (-0.18, -0.11, 0.98)$
Círculo g	Círculo (H, J, I)	$g: X = (-0.03, 0.05, 0) + (0.82 \cos(t) + 0.25 \sin(t), 0.47 \cos(t) + 0.22 \sin(t), 0.32 \cos(t) - 0.94 \sin(t))$
Ponto K	Ponto(f)	$K = (0.44, 0.32, 0.84)$
Ponto L	Ponto(e)	$L = (-0.76, -0.44, 0.48)$
Ponto M	Ponto(e)	$M = (-0.62, 0.78, -0.1)$
Arco h	Arco Circular (O, M, L)	$h = 1.49$
Arco k	Arco Circular (O, L, K)	$k = 1.65$
Arco s	Arco Circular (O, K, M)	$s = 1.68$
ângulo α	Ângulo (K, O, M)	$\alpha = 96.14^\circ$

ângulo β	Ângulo (L, O, K)	$\beta = 94.51^\circ$
Ângulo γ	Ângulo (L, O, M)	$\gamma = 85.19^\circ$
Texto:		"Triângulo Esférico"

Fonte: Elaborado pela autora com base na planilha do software Geogebra.

A construção está disponível no link: <https://www.geogebra.org/m/wg8rpumj>, para posterior visualização do passo a passo.

3.1. Percepções da Geometria Esférica através do uso do Transferidor Esférico

Ao pensar num plano Euclidiano, pode-se sem muitas ferramentas visualizar pontos, segmentos de retas, ângulos. O mesmo não acontece numa superfície esférica, pois a visão tridimensional carece de acessórios mais sofisticados. Buscando entender alguns conceitos da Geometria Esférica, iremos verificar algumas ideias, para este passo precisaremos de um transferidor, entretanto um instrumento que simplesmente mede ângulos em espaços planos seria inútil visto que nos confrontamos com uma superfície esférica. Partindo da orientação de Santos Jr. e Maia (2020) criaremos um dispositivo de medição angular esférico, transferidor esférico, com a finalidade de demonstrar alguns pontos essenciais à compreensão.

3.2. Materiais

01 bola de isopor com 150 mm, retalhos de acetato, canetas coloridas, ligas de borracha, fita métrica, tesoura e fita adesiva.

3.3. Passo a passo

1. Recortar tiras de acetato;
2. Com fita métrica encontrar o diâmetro da esfera (bola de isopor) para estabelecer o raio da circunferência;
3. Cortar as tiras de acetato mediante as medidas da circunferência e dos quadrantes baseando-se nas medidas encontradas;
4. Fazer a graduação relacionando ângulo (em graus) com comprimento (em cm) através uso de caneta permanente;
5. Fechar com uso de fita adesiva.

Figura 4 - Confeção do Transferidor Esférico.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Para construção do transferidor esférico foi estabelecida uma relação da medida do ângulo com o respectivo arco da circunferência determinado por esse ângulo.

Como o comprimento da circunferência é dado por $C = 2 \cdot \pi \cdot R$, onde R é um segmento equidistante a qualquer ponto da circunferência, o comprimento de um arco AB^\wedge , de ângulo central α é dado por $AB^\wedge = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R$, ou seja, considerando um ângulo central unitário, temos $AB = \frac{\pi R}{180}^\wedge$. Como a bola tem diâmetro 150mm, então, $R = 7,5cm$ e $AB = \frac{7,5\pi}{180} \approx 0,13cm^\wedge$.

O passo a passo para construção do dispositivo encontra-se neste link: <https://youtu.be/L0d4r0u4QBg>.

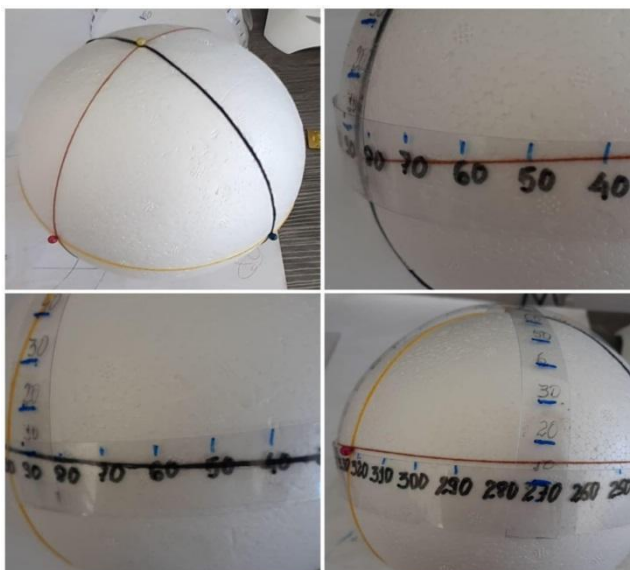
3.4. Este transferidor esférico tem a finalidade de observar

3.4.5. A soma dos ângulos internos de um Triângulo Esférico

O triângulo esférico foi construído sobre uma esfera (Bola de 150 mm), para isso foram utilizadas linhas coloridas constituindo as circunferências máximas, marcando-se os arcos que os constituem os lados do triângulo e delimitando seus ângulos internos A^\wedge , B^\wedge e C^\wedge . Logo em seguida, com auxílio do transferidor esférico criado medimos os seguintes ângulos:

$A^\wedge = 100^\circ$; $B^\wedge = 95^\circ$ e $C^\wedge = 85^\circ$, ou seja, $A^\wedge + B^\wedge + C^\wedge = 280^\circ > 180^\circ$ contrapondo ao proposto na Geometria Euclidiana.

Figura 5 - Medições de ângulos no triângulo esférico



Fonte: Elaborado pelos autores.

3.4.6. Cálculo de distância

Nesta atividade investigativa não devemos deixar de lembrar Erastóstenes criador do crivo dos números primos que com ferramentas rudimentares descobriu, também, o diâmetro aproximado da terra. Hoje, sabe-se que mede 6.371 km, informação que iremos precisar para esta medição na esfera visualizada como globo terrestre. Relembrando conceitos geográficos como paralelos, meridianos, longitudes, latitudes, pontos cardeais. Determinar a partir da medição de ângulos na superfície esférica a distância entre duas cidades.

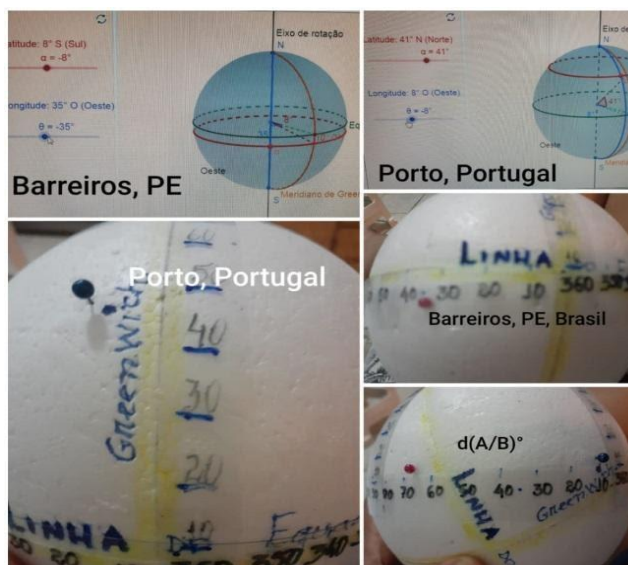
Adaptado de Silva (2017): As cidades de Barreiros, PE, - Brasil e Porto- Portugal encontram-se localizadas sobre círculos máximos. As medidas geográficas das cidades consideradas são: Barreiros, PE, Brasil = $8^{\circ} 48' 46.938''$ S, - $35^{\circ} 11' 33.692''$ W e Porto, Portugal = $41^{\circ} 9' 0''$ N, $8^{\circ} 36' 37''$ W. Considerando somente latitude e longitude, em graus, calculamos através do transferidor esférico, a distância entre estas duas cidades considerando $\pi = 3,14$ e o raio da terra $R = 6.371km$.

3.4.7. Passo a passo

- 1) Na esfera (Bola de 150 mm) desenhamos duas circunferências máximas, uma simbolizando a linha do Equador e a outra o Meridiano de Greenwich;

- 2) Utilizando o dispositivo para medir seus ângulos e localizar as cidades consideradas mediante suas coordenadas geográficas como latitude e longitude, utilizando apenas as medidas em graus;
- 3) Após a localização, identificar os pontos no globo desenhando uma circunferência máxima ligando esses pontos;
- 4) Com uso do transferidor esférico, medimos o arco que distancia as duas cidades chegando a 56° partindo deste valor, transformando usando de proporcionalidade, convertendo as medidas de graus no arco gerado em km, achando assim a distância entre os locais de forma aproximada.

Figura 6 - Medindo as distâncias entre cidades mediante coordenadas geográficas.



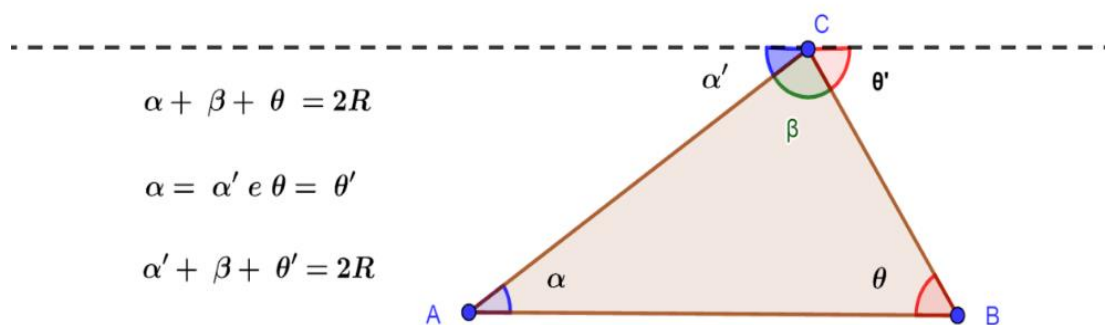
Fonte: Elaborado pelos autores.

Segundo (Heim, 2013, p. 44) “a distância entre dois pontos, considerando a superfície esférica, determina-se calculando o comprimento do menor arco da circunferência máxima definida por esses dois pontos”. Ora, considerando o globo terrestre uma esfera e que a distância d entre as cidades forma um arco de $\theta = 56^\circ$, obtemos um arco de comprimento $AB^{\wedge} = d = \frac{\theta}{360} \cdot 2\pi R = \frac{56}{360} \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 6371$, isto é, $d \cong 6.223,76\text{km}$. O que é razoável se confrontarmos com os dados do Google Maps observados no link <https://goo.gl/maps/dFu3wex19xPVHn2r9>, no qual estas duas cidades ficam a uma distância aproximada de 6.202,01 km.

4. A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

Segundo a 32ª proposição de Euclides na Geometria Plana um triângulo qualquer resulta, na soma de seus ângulos internos, em 180° , para provarmos isto, considere um triângulo qualquer ABC , conforme figura 7, onde $\angle C = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle A = \theta$, traçamos no vértice C uma paralela ao lado oposto, formando-se ângulos alternos internos no encontro das paralelas. Decorre que $\alpha = \alpha'$ e $\theta = \theta'$ e que $\alpha' + \beta + \theta' = 2R$.

Figura 7 - Demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo



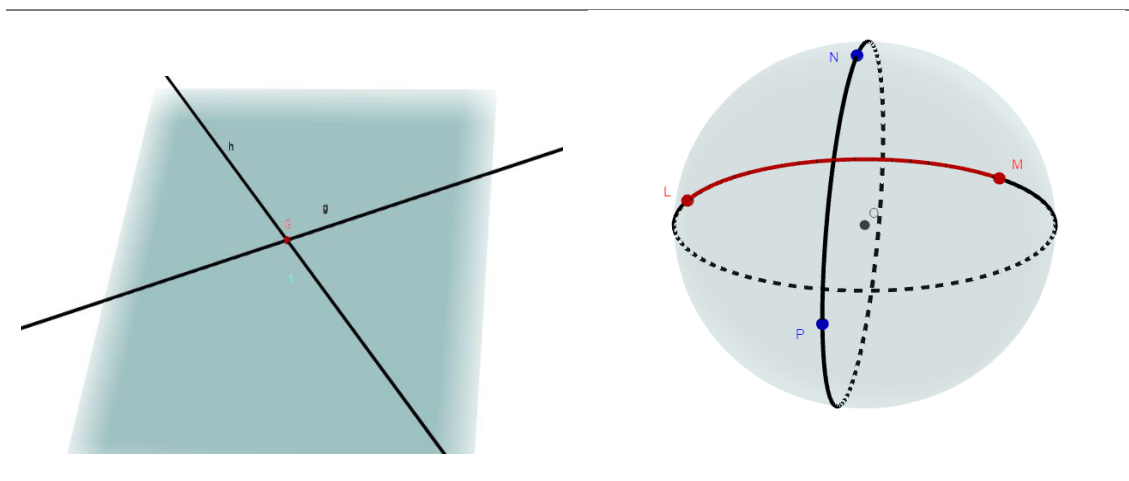
Fonte: Elaborado pelos Autores.

Tal resultado não satisfaz o triângulo esférico uma vez que os lados são arcos de circunferências máximas. Ao analisar o caso, observamos que a soma dos ângulos difere pela superfície em que se encontram tais triângulos. Segundo Carvalho (2007) “o diferencial entre essas superfícies é a curvatura de cada uma.”, já Marqueze (2006) complementa: “A Geometria Esférica sendo independente do quinto postulado de Euclides impõe que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico não seja constante, isto é, varia entre 180° e 540° sendo representado pela desigualdade $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$.”

Então como entender esse excedente na soma de ângulos internos entre triângulos? Percebemos que o diferencial é a curvatura das superfícies em questão. Buscando compreender, fizemos um breve passeio pela Física, descobrimos que Albert Einstein (1955-1879) usou como base as ideias de Gauss e Riemann de uma nova geometria para desenvolver a Teoria da Relatividade, o estudo sobre Espaço-tempo, nela considera-se a gravidade e a visão do observador gerando ângulos côncavos e convexos para compreender a curvatura das superfícies. A curvatura é referenciada matematicamente através de uma constante K , onde $K = k_1 x k_2$. Na superfície plana a constante $K = 0$, na superfície esférica a constante $K > 0$, sendo expressa pelo produto das

duas constantes nas superfícies em questão pela interseção de retas, na geometria plana e de arcos na geometria esférica.

Tabela 2 - Comparando Superfícies.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Na tabela acima vemos duas figuras a primeira refere-se a uma Figura no espaço plano, a segunda uma superfície esférica, consideremos as retas h e g como constantes na curvatura K_1 e K_2 , obtemos a constante de curvatura K pelo produto de ambas, assim temos:

$$(1) K_1 = 0, K_2 = 0, K_1 \times K_2 = 0, K = 0,$$

Logo curvatura zero, curvatura nula, impondo que a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Plana, superfície plana, seja $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$.

4.1. Analogamente faremos com os arcos LM e NP como k_1 e k_2

$$(2) K_1 > 0, K_2 > 0, K_1 \times K_2 > 0, K > 0$$

Logo curvatura positiva, impondo que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico na Geometria Esférica exceda os 180° , numa desigualdade $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$.

5. Conclusão

Existe de fato um triângulo que excede em 180° na soma de seus ângulos internos. Esta propriedade vem da sua localização em uma superfície esférica que devido a sua curvatura positiva impõe uma dupla desigualdade $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$, onde os lados deste triângulo são arcos de circunferências máximas. Tal triângulo é um polígono não da Geometria Euclidiana e sim de uma Geometria Não-Euclidiana. Após anos de estudos e constatações uma dessas Geometrias foi denominada Esférica por considerar o estudo de elementos em superfícies curvas.

Tal geometria difere principalmente na questão do paralelismo, que inexistente, sendo constatado que em superfícies curvas a reta, por se fechar, transforma-se em circunferência máxima finita, mas não ilimitada, proporcionando ponto de encontros entre elas. Percebe-se sem dúvida que a Geometria Axiomática criada por Euclides, apesar de algumas mudanças, é essencial à compreensão do estudo dos espaços planos e alguns de seus conceitos são utilizados em outras geometrias. Infelizmente a Geometria Esférica é pouco mencionada, mas tem grande aplicabilidade em navegação, Geolocalização (GPS), Astronomia. Esta oportunidade me fez conhecê-la e perceber que a ferramenta necessária nos cálculos em Geometria dependerá da sua aplicabilidade cabendo a cada um diferenciar o que melhor se adequa aos espaços estudados.

Referências

AZEVEDO F., **Materiais Geogebra.** Disponível em: <https://beta.geogebra.org/u/afsouza5732>, Acesso em: 08 de dez. 2020.

BICUDO, I; Euclides. **Elementos.** 2009. Ed. São Paulo: UNESP, f. 12-17; 97-136. 600 p. (Ciências Exatas).

CARVALHO, G. S. **Geometrias Não Euclidianas: Uma Proposta de Inserção da Geometria Esférica no Ensino Básico.** Viçosa, f. 15-27. 64 p. Dissertação (Mestrado profissional em matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2017. Disponível em: <https://www.locus.ufv.br/bitstream/123456789/18025/1/texto%20completo.pdf>. Acesso em: 02 mar. 2020.

GOOGLE FOTOS. Disponível em: <https://photos.google.com/u/1/album/AF1QipOifX7o8zqa1TGfaT-FwMBhsjLsFO7sY62JDWaR>. Acesso em: 10 dez 2020.

GOOGLE MAPS. Disponível em: <https://goo.gl/maps/dFu3wex19xPVHn2r9>., Acesso em: 12 dez. 2020.

HEIM, L. **Geometria Esférica: proposta de atividades em conexão com a geografia.** Recife, 2013. 77 p. Disponível

em: http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/tcc_luciane_versao_final.pdf. Acesso em: 25 ago. 2020.

MARQUEZE, J. P. **As Faces dos Sólidos na Superfície Esférica: Uma proposta para o ensino-aprendizagem de Noções Básicas de Geometria Esférica**. Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP. 2006, 187 p., pág. 47-76. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11134/1/dissertacao_joao_pedro_marqueze.pdf. Acesso em: 10 set. 2020.

SANTOS JR., C. L., & MAIA, L. de S. L. 2020. “Atividade Orientadora De Ensino: Uma Proposta à Produção de Significados em Geometria”. *Plurais Revista Multidisciplinar* 5 (2), 143-68. Disponível em: <https://doi.org/10.29378/plurais.2447-9373.2020.v5.n2.143-168>. Acesso em: 13 dez. 2020.

SILVA, E.L. **A Contextualização da Geometria Esférica pelo Estudo do Globo Terrestre e suas representações com o uso do Software Geogebra**. Campina Grande-PB, 2017. 165 p. Dissertação (Mestrado profissional- PROFMAT/CCT/UFGG) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande - PB, 2017. Disponível em: http://mat.ufcg.edu.br/profmat/wp-content/uploads/sites/5/2019/09/TCC_EDUARDO_LUINI_DA_SILVA.pdf Acesso em: 04 ago. 2020.

SOUZA, F. **Confeccionando transferidor esférico.**, 2020. 1 vídeo (05:21 min). Publicado pelo canal [Françoise Souza]. Disponível em: <https://youtu.be/L0d4r0u4QBg>. Acesso em: 2 dez. 2020.

THOMAZ, M.L. **Geometria Não-Euclidiana/ Geometria Esférica**. Paraná, 2008. E-book (19 p.) Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_mara_lucia_thomaz. Acesso em: 31 jul. 2020.